

10 Пространство L_1 , его полнота, плотность множества непрерывных функций в L_1

$X = [0, 1]$ (или $(0, 1)$); μ - σ -адд. мера Лебега; Σ - σ -алг. измеримых мн-в

$f \in L_1$, if оно интегр. по Леб., $\|f\| = \int_{(0,1)} |f(x)| dx$

1) $\|f\| > 0$: очевидно; $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (н.в.);

2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$: очевидно;

3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (т.к. $|f+g| \leq |f| + |g|$)

Полно ли это пр-во?

$\Downarrow$ If $\|f_n - f_m\| \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0$, то $\exists f \in L_1: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$

$\Delta \square f_{n_k} - \text{н/посл-во: } \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < 1/2^k$

$f_{n_k} = f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \dots + (f_{n_k} - f_{n_{k-1}})$. $\square S_k(x) = |f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \dots + |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|$. S_k - интер.; $S_k \leq S_{k+1}$, $\forall k$, н.в. x ; $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) = S(x)$

$\int_{(0,1)} |f_{n_1}| dx + \int_{(0,1)} |f_{n_2} - f_{n_1}| dx + \dots + \int_{(0,1)} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| dx + \dots \leq 1/2 + 1/4 + \dots + \|f_{n_1}\| = 1 + \|f_{n_k}\| \Rightarrow S(x)$ интер. по Леб.

~~В силу~~ В силу суммы $S_k(x)$, $f_{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{н.в.}} f$ (убо сходясь по 1.1), $|f_{n_k}(x)| \leq S(x) \forall k$, н.в. x . По $\square$ Лебега, $\int_{(0,1)} |f_{n_k} - f| dx \rightarrow 0$ (убо $|f_{n_k} - f| \leq 2S(x)$). Значит $\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$\Downarrow$ If $f \in L_1$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists$ прост. ф-ция с конеч. числом знач-й g : $\|f - g\| < \varepsilon$

$\Delta \sup_{\phi \in \mathcal{P}} \int_X \phi(x) d\mu \in \int_X f(x) d\mu$; $\forall \varepsilon > 0 \exists$ прост. ф-ция с конеч. числом знач-й: $|\int_X f d\mu - \int_X \phi d\mu| < \varepsilon$

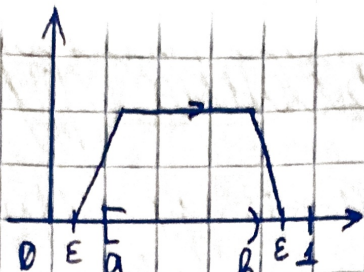
$\Downarrow \square \mu$ -длина; $f \in L_1(0,1)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ непр. $g(x)$: $\|f - g\| < \varepsilon$

$\Delta 1) \forall \varepsilon > 0 \exists$ прост. ф-ция $g(x)$: $\|f - g\| < \varepsilon$; $g(x) = \sum_{k=1}^N g^k \chi_{A_k}(x)$

2) $x \in A(x)$; A - измер., по крит. измер-ти $\exists$ элемент B : $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$, $|x_A(x) - x_B(x)| \neq 0$ на $A \Delta B$. $\int_{(0,1)} |x_A - x_B| dx = \int_{A \Delta B} 1 dx = \mu(A \Delta B) < \varepsilon$. Но раз B - элемент, то $B = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k]$; $x_B(x) = \sum_{k=1}^n \chi_{[a_k, b_k]}(x)$

3) $\alpha_{[a,b]}(x)$ (a);

$\varphi(x)$ - трапеция



$$\varphi(x) - \alpha_{[a,b]}(x) \neq 0 \text{ на } (a-\epsilon, a) \text{ и } (b, b+\epsilon) \Rightarrow \int_{[0,1]} (\varphi(x) - \alpha_{[a,b]}(x)) dx = 2\epsilon$$

⇓ (непр-то в метрике L_1) $\nexists f(x) \in L_1[0,1]$, μ -
-гладна. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$: как только $|\Delta| < \delta$, то

$$\int_{[0,1]} |f(x+\Delta) - f(x)| dx < \epsilon$$

▲ $\nexists f \equiv 0$ вне $[0,1]$. $\nexists L(-1,2)$. Это пред. $\nexists$, $\forall \epsilon > 0$

$\exists g(x)$ - непр. на $[-1,2]$, $\|g - f\| < \epsilon$.

$$\int_{[0,1]} |f(x+\Delta) - f(x)| dx \leq \int_{[0,1]} |f(x+\Delta) - g(x+\Delta)| dx + \int_{[0,1]} |g(x+\Delta) - g(x)| dx + \int_{[0,1]} |g(x) - f(x)| dx$$

$$\leq \underbrace{\int_{[0,1]} |f(x+\Delta) - g(x+\Delta)| dx}_{< \epsilon} + \int_{[0,1]} |g(x+\Delta) - g(x)| dx + \underbrace{\int_{[0,1]} |g(x) - f(x)| dx}_{< \epsilon}$$

$g(x)$ - непр. $\Rightarrow$ равн. непр. $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$: как только $|\Delta| < \delta$, то $|g(x+\Delta) - g(x)| < \epsilon$